

**Einführung in die Informatik II**  
**Entwurf durch Verträge:**  
**3. Prädikatenlogik,**  
**Verträge für Lösungsklassen**

Prof. Bernd Brügge, Ph.D  
Institut für Informatik  
Technische Universität München

Sommersemester 2001

28. - 30. Mai 2001

**Aussagenlogik (Wiederholung)**

- ❖ Die **Aussagenlogik** behandelt Formeln, in denen nur Terme vom Typ Boolean auftreten.
  - $p = \text{"Rostig ist Partner im Treueprogramm Gold \& Silber."}$
  - $q = \text{"Lustig ist Partner im Treueprogramm Gold \& Silber."}$
  - $p \wedge q = \text{true}$
- ❖ "Rostig ist Partner im Treueprogramm Gold & Silber" ist ein Beispiel einer **elementaren Aussage**,
- ❖  $p$  und  $q$  heißen **Identifikatoren**,
- ❖  $p \wedge q$  ist ein Beispiel eines **booleschen Terms**,
- ❖  $p \wedge q = \text{true}$  ist eine **Formel**, die abhängig von der **Belegung** von  $p$  und  $q$  entweder wahr oder falsch ist.

**Prädikatenlogik**

- ❖ Die **Prädikatenlogik** ist allgemeiner als die Aussagenlogik. Sie untersucht Aussagen, die auch Variablen enthalten können, wobei die Variablen Werte aus einer beliebigen Trägermenge (nicht nur Boolesche Werte) annehmen können.
  - Eine Aussage, die auch Variable enthalten kann, heißt **prädikatenlogischer Ausdruck** oder oft kurz **Prädikat**.
- ❖ **Beispiel eines Prädikats:**
  - " $x$  ist Programmpartner im 'Treueprogramm Gold & Silber'!", wobei  $x \in M = \{\text{Rostig, Luftig, Oktoni}\}$
  - " $x$  ist Programmpartner im 'Treueprogramm Gold & Silber'." ist wahr, wenn  $x$  den Wert Rostig hat, aber falsch, wenn  $x$  den Wert Lustig hat.
- ❖ Die Prädikatenlogik ist ein wichtiges Werkzeug für die Spezifikation von Verträgen und für die Verifikation von Programmen.
- ❖ OCL ist eine Prädikatenlogik.

**Definition: Prädikat**

- ❖ **Definition Prädikat:** Eine Abbildung
  - $P: M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow \mathbb{B}$
- von Tupeln über gegebenen Trägermengen  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  in die Menge der Wahrheitswerte  $\mathbb{B}$ , heißt ein  **$n$ -stelliges Prädikat** oder eine  **$n$ -stellige Boolesche Funktion** über der Menge  $M_1 \times \dots \times M_n$ .
- ❖ **Beispiele von  $n$ -stelliges Prädikaten:**
  - Die Abbildung " $x$  studiert Informatik", wobei  $x$  ein Element der Menge  $M_1$  aller Studenten ist, ist ein einstelliges Prädikat über  $M_1$ .
  - Die Abbildung " $x \geq y$ ", wobei  $x$  und  $y$  natürliche Zahlen sind, definiert ein zweistelliges Prädikat.
  - Allgemein: Die Abbildungen  $\leq, \neq, =, >, <$  sind zweistellige Prädikate über der Menge der natürlichen oder reellen Zahlen

## Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit von Prädikaten

- ❖ Für uns ist interessant, dass wir aus Prädikaten über der gesamten Trägermenge elementare Aussagen formen können:  
Sei  $M$  eine Trägermenge.
- ❖ Für **jedes Prädikat  $p(x)$**  können wir immer die folgenden zwei elementaren **Aussagen** formulieren:
  - 1. "Für alle  $x \in M$  gilt  $p(x)$ "
    - Ist diese Aussage wahr, dann heißt das Prädikat  $p(x)$  **allgemeingültig**.
  - 2. "Es gibt mindestens ein  $x \in M$ , so dass  $p(x)$  gilt"
    - Ist diese Aussage wahr, dann heißt das Prädikat  $p(x)$  **erfüllbar**.
- ❖ **Beispiel:** Sei  $M = \{\text{Schaldi, Oktoni, Rostig, Luftig, Lustig}\}$  und  $p(x) = \text{"}x \text{ ist Programmpartner im 'Treueprogramm Gold \& Silber'."}$ 
  - $p(x)$  ist nicht allgemeingültig (Lustig ist nicht im Treueprogramm), aber erfüllbar (Schaldi ist im Treueprogramm).

## Quantoren und Quantifizierung

- ❖ Die Aussage "Für alle  $x \in M$  gilt  $p(x)$ " schreibt man auch als
  - $\forall x \in M: p(x)$  oder
  - $\forall m x: p(x)$ , wobei  $m$  der Typ (Klasse) von  $M$  ist.
    - Sprechweise: "Für alle  $x$  vom Typ  $m$  gilt  $p(x)$ "
- ❖ Die Aussage "Es gibt mindestens ein  $x \in M$ , für das  $p(x)$  gilt." schreibt man auch kurz als
  - $\exists x \in M: p(x)$  oder
  - $\exists m x: p(x)$ , wobei  $m$  der Typ (Klasse) von  $M$  ist.
    - Sprechweise: "Es gibt mindestens ein  $x$  vom Typ  $m$ , für das  $p(x)$  wahr ist."
- ❖  $\forall$  nennt man den **Allquantor** oder Universalquantor,  $\exists$  nennt man den **Existenzquantor**
- ❖ **Definition:** Die Umwandlung eines Prädikats  $p(x)$  in eine Aussage, indem man es mit einem Quantor versieht, heißt **Quantifizierung**.

## Interpretation von quantifizierten Prädikaten

- ❖  $\forall x \in M: p(x)$  ordnen wir den Wahrheitswert wahr zu, falls für alle  $x \in M$  der Wert von  $p(x)$  wahr ist, sonst falsch.
- ❖ Gegeben sei eine Belegung  $\beta$ .
- ❖ Die Interpretation  $I_\beta$  von  $\forall x \in M: p(x)$  ist:
$$I_\beta [\forall x \in M: p(x)] = \text{L falls für alle } a \in M: I_{\beta[a/x]} [p(x)] = \text{L}$$
$$\text{O sonst}$$
- ❖ Die Interpretation  $I_\beta$  von  $\exists x \in M: p(x)$  ist:
$$I_\beta [\exists x \in M: p(x)] = \text{L falls für ein } a \in M: I_{\beta[a/x]} [p(x)] = \text{L}$$
$$\text{O sonst}$$

## Termersetzungsregeln gibt es auch in der Prädikatenlogik

- ❖ Ein Identifikator  $x$  in der Aussage  $\forall m x: p(x)$  oder  $(\neg \exists m x: p(x))$  heisst **gebundener Identifikator**, denn er wird durch den Quantor gebunden.
- ❖ **Wiederholung** (aus Info I - Termersetzungssysteme): Sei  $t$  ein Term.
  - wenn wir  $x$  durch  $y$  ersetzen, dann schreiben wir:  $t[y/x]$
  - und lesen: " Substitution von  $x$  durch  $y$ ".
- ❖ **Gesetz der Umbenennung für gebundene Identifikatoren:**  
Gebundene Identifikatoren können umbenannt werden, ohne dass sich die Bedeutung der Prädikate ändert.  
Sei  $t$  der Name eines Prädikates, also  $t = p(x)$ . Es gelten:
  - $(\forall m x: t) = \forall m y: (t[y/x])$ , falls  $y$  nicht frei in  $t$  vorkommt
  - $(\exists m x: t) = \exists m y: (t[y/x])$ , falls  $y$  nicht frei in  $t$  vorkommt
- ❖ Aussagen, die durch Umbenennung gebundener Identifikatoren entstehen, sind semantisch äquivalent.  
Komplizierter wird es bei freien Identifikatoren.

## Termersetzungsregeln bei freien Identifikatoren

- ❖ Sei  $x$  ein gebundener Identifikator und  $y$  ein freier Identifikator. Dann gilt folgende Termersetzungsregel:
  - $(\forall m x: t) [t'/y] = \forall m x:(t[t'/y])$
- ❖ Eine kleine Komplikation haben wir, wenn  $x$  in  $t$  zwar gebunden, in  $t'$  aber frei ist.
  - Wenn wir in einem solchen Fall die Substitution  $[t'/y]$  ohne weiteres ausführen würden, wäre  $x$  plötzlich auch in  $t'$  gebunden!
- ❖ Lösung:
  - Wir benennen  $x$  in der Aussage  $(\forall m x:t)$  um, und zwar mit Hilfe des Gesetzes der Umbenennung für gebundene Identifikatoren:  $(\forall m z:t)$
  - Dann erst nehmen wir die Substitution  $[t'/y]$  in  $(\forall m z:t) [t'/y]$  vor.

## Prädikate in OCL

- ❖ Die meisten Einschränkungen, die wir bisher in OCL formuliert haben, waren Prädikate.
- ❖ Beispiel: Der OCL-Ausdruck  
**KundenKarte**  
**gedruckterName = kunde.titel.concat(kunde.name)**  
beschreibt ein 3-stelliges Prädikat  $p: M \times K \times N \rightarrow \mathbb{B}$ 
  - $p(m,n,k)$ : "Der Kunde  $m$  mit dem Namen  $n$  hat eine Kundenkarte  $k$ , auf welcher der Name  $n$  gedruckt ist".
  - Die Trägermengen sind:
    - $M = \{x: x \text{ ist Kunde im "Treueprogramm Gold \& Silber"}\}$
    - $K = \{k: k \text{ ist Kundenkarte im "Treueprogramm Gold \& Silber"}\}$
    - $N = \{n: n \text{ ist Zeichenkette über dem Alphabet } A = \{ 'a', \dots, 'z' \} \}$
- ❖ OCL erlaubt auch die Quantifizierung von Prädikaten

## Quantoren in OCL

- ❖ OCL unterstützt beide Arten von Quantoren:
- ❖ Der Allquantor  $\forall$  heißt in OCL **forAll**:
  - **forAll** nimmt einen OCL-Ausdruck  $o$  als Parameter und ist wahr, wenn dieser Ausdruck für alle Elemente einer Sammlung wahr ist, sonst ergibt **forAll** falsch.
  - Signatur:  
**collection->forAll(O:OCLAusdruck):Boolean**
- ❖ Der Existenzquantor  $\exists$  heißt in OCL **exists**
  - **exists** nimmt einen OCL-Ausdruck  $o$  als Parameter und ist wahr, wenn dieser Ausdruck für mindestens ein Element einer Sammlung wahr ist, sonst ergibt **exists** falsch.
  - Signatur:  
**collection->exists(O:OCLAusdruck):Boolean**

## Einsatz des Allquantors in OCL

- ❖ **Einschränkung:** "Die Dienste, die ein Programmpartner in einem Bonusprogramm anbietet, sind nur in diesem Programm nutzbar, d.h. alle Transaktionen müssen innerhalb des Programms ablaufen."
- ❖ **Zugehöriger OCL-Ausdruck:**  
**BonusProgramm:**  
`partner.gelieferteDienste.transaktionen->forAll  
(programm() = self)`
- ❖ Frage: Welches Prädikat beschreibt dieser OCL-Ausdruck und welche Stelligkeit hat es?

## Einsatz des Existenzquantors in OCL

- ❖ **Einschränkung:** "Wenn in einem Bonuskonto die Punkte größer als Null sind, dann gibt es mindestens eine Transaktion mit mehr als Null Punkten."
- ❖ **Zugehöriger OCL-Ausdruck:**  
BonusKonto:  
punkte > 0 **implies** transaktionen->**exists**(punkte > 0)

## Beziehung zwischen Existenzquantor und Allquantor

- ❖ In der Prädikatenlogik können wir den Allquantor durch Negation über den Existenzquantor ausdrücken und umgekehrt:
  - $(\forall m x: p(x)) = (\neg \exists m x: \neg p(x))$
  - $(\exists m x: p(x)) = (\neg \forall m x: \neg p(x))$
- ❖ Für eine OCL-Sammlung **s** und einen OCL-Ausdruck **o** gilt also:
  - $s \rightarrow \mathbf{forAll}(o) = \mathbf{not}(s \rightarrow \mathbf{exists}(\mathbf{not}(o)))$
  - $s \rightarrow \mathbf{exists}(o) = \mathbf{not}(s \rightarrow \mathbf{forAll}(\mathbf{not}(o)))$
- ❖ Beispiel: Aus dem Prädikat

BonusKonto:

points > 0 **implies** transaktionen->**exists**(punkte > 0)

erhalten wir durch Anwendung der Termersetzungsregeln für Prädikate:

BonusKonto:

points > 0 **implies**

**not**(transaktionen->**forAll**(**not**(punkte>0)))

## Einsatz von Verträgen: Anwendungsklassen vs. Lösungsklassen

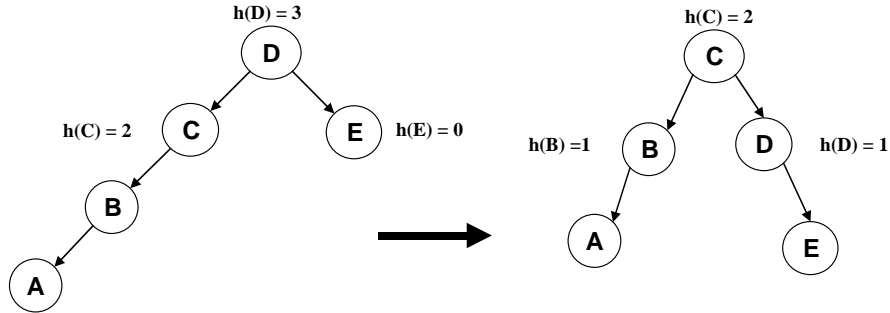
- ❖ Die TUMBoS-Klassen stammen aus der Anwendungsdomäne:
  - Die Verträge spezifizieren anwendungsbezogene Einschränkungen
- ❖ Verträge können auch für Klassen in der Lösungsdomäne (**Lösungsklassen**) vereinbart werden
  - ⇒ Spezifikation anwendungsunabhängiger Einschränkungen
- ❖ Besonders interessant: Verträge für wiederverwendbare Lösungsklassen (als Bestandteil von Klassenbibliotheken):
  - Vertrag liefert dem Anwendungsentwickler Informationen über
    - Invarianten der Lösungsklassen
    - Eigenschaften von Algorithmen und Datenstrukturen
  - ⇒ Unterstützung des Anwendungsentwicklers bei der Auswahl von Algorithmen und Datenstrukturen, die zur Lösung des jeweiligen Anwendungsproblems geeignet sind.
- ❖ Beispiel: Spezifikation von AVL-Bäumen und ihre Eigenschaften

## AVL Bäume: Motivation

- ❖ In Info I - Vorlesung 13 hatten wir kennengelernt, dass ein sortierter Binärbaum **b** mit **n** Knoten im ungünstigsten Fall zu einem Baum der Höhe **n** (entspricht einer verketteten Liste) entarten kann.
- ❖ **(Wiederholung) Definition Höhe eines Baums:** Die Höhe eines Baums ist das Maximum der "Höhen" aller seiner Blätter.
  - Die "Höhe" eines Blattes in einem Baum ist die Länge des Pfads von der Baumwurzel bis zu diesem Blatt.
  - Die Höhe eines leeren Baums sei -1.
  - Die Höhe eines Baums **b** bezeichnen wir mit **h(b)**.
- ❖ Komplexität von Bäumen: Der Aufwand für Einfügen, Suchen, Löschen ist beim sortierten Binärbaum abhängig von der Höhe des Baums:
  - nicht entarteter Baum: Aufwand  $O(\log n)$
  - entarteter Baum: Aufwand  $O(n)$

### Kennzeichen für entartete Bäume

- ❖ Das Kennzeichen für einen entarteten Baum: linker und rechter Unterbaum unterscheiden sich stark in ihrer Höhe.



- ❖ Um die logarithmische Komplexität zu behalten, müssen wir also verhindern, dass ein Baum entartet.
- ❖ Idee: Ausgleichen der Höhen der Unterbäume ("Höhenbalancierung")

### AVL-Bäume: Definition

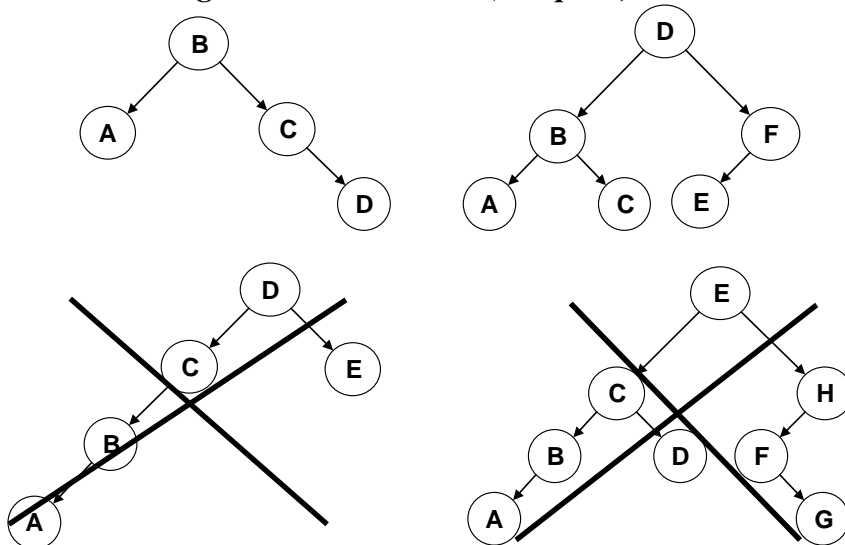
- ❖ **Definition AVL-Bedingung:** Sei  $k$  ein beliebiger Knoten in einem Binärbaum. Der Knoten  $k$  erfüllt die **AVL-Bedingung**, wenn für seine beiden Unterbäume  $k.l$  und  $k.r$  gilt:

$$- |h(k.l) - h(k.r)| \leq 1$$

Ein Knoten erfüllt die AVL-Bedingung also genau dann, wenn sich die Höhen seiner beiden Unterbäume höchstens um 1 unterscheiden.

- ❖ **Definition AVL-Baum:** Ein AVL-Baum  $b$  ist ein Binärbaum, für den gilt: *Alle* Knoten des Baums  $b$  erfüllen die AVL-Bedingung.
- ❖ **Bemerkung:** AVL-Bäume wurden 1962 von Adelson-Velski und Landis entdeckt.

### Erkennung von AVL-Bäumen (Beispiele)



### Eigenschaften von AVL-Bäumen

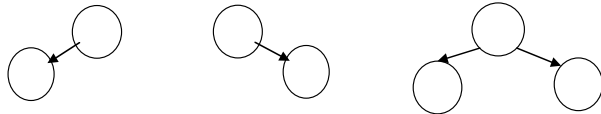
- ❖ Ein AVL-Baum der Höhe  $h$  hat mindestens  $F_{h+1} - 1$  Knoten, wobei  $F_h$  die  $h$ -te Fibonacci Zahl ist.
  - Definition der Fibonacci-Zahlen:  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
- ❖ Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion

### Ein AVL-Baum der Höhe $h$ hat mindestens $F_{h+1} - 1$ Knoten (1)

- Sei  $n_{min}(h)$  die minimale Anzahl der Knoten im Baum mit der Höhe  $h$
- Induktionsanfang:**
  - Für  $h = 0$  gibt es genau einen nicht-leeren AVL-Baum mit 1 Knoten, d.h.  $n_{min}(0) = 1$ :
    - $n_{min}(0) = 1 \geq F_1 - 1 = 0$ , denn  $F_1 = 1$



- Für  $h = 1$  gibt es genau drei verschiedene nicht-leere AVL-Bäume (mit zwei oder drei Knoten, d.h.  $n_{min}(1) = 2$ ):
  - $n_{min}(1) = 2 \geq F_2 - 1 = 0$ , denn  $F_2 = 1$



Für  $h = 0$  und  $h = 1$  ist die Annahme somit korrekt.

### Ein AVL-Baum der Höhe $h$ hat mindestens $F_{h+1} - 1$ Knoten (2)

- Induktionsschritt  $h-1 \rightarrow h$ :**
- Seien nun  $k.l$  und  $k.r$  die Kinder des Knotens  $k$ . Wir nehmen an, dass die Behauptung für  $k.l$  und  $k.r$  richtig ist, d.h. ein AVL-Baum der Höhe  $h - 1$  hat mindestens  $F_h - 1$  Knoten.
- Es gilt:  $h(k) = 1 + \max(h(k.l), h(k.r))$  (Definition der Höhe eines Baums)
- $k$  erfüllt die AVL-Bedingung  $\Rightarrow$  3 Fälle:
  - $h(k.l) = h(k.r)$ ,  $h(k.l) = h(k.r) + 1$  und  $h(k.l) = h(k.r) - 1$
- 1. Für  $h(k.l) = h(k.r) = h - 1$  gilt:
  - $n_{min}(h) = 1 + n_{min}(h(k.l)) + n_{min}(h(k.r))$  -- Minimale Anzahl von Baum der Höhe  $h$
  - $\geq 1 + F_{h(k.l)+1} - 1 + F_{h(k.r)+1} - 1$  -- Induktionsannahme
  - $= F_{(h-1)+1} + F_{(h-1)+1} - 1$  -- Umformung des Ausdrucks und  $h(k.l) = h(k.r)$
  - $> F_h + F_{h-1} - 1$  -- Eigenschaft von Fibonacci:  $F_n > F_{n-1}$  bei  $n > 2$
  - $= F_{h+1} - 1$  -- Definition Fibonacci:  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
- 2. Für  $h(k.l) = h(k.r) + 1$  und  $h(k.l) = h(k.r) - 1$  ist die Ableitung ähnlich

### Modellierung von AVL-Bäumen

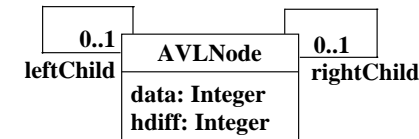
- Wir modellieren die Klasse **AVLTree** mit derselben Schnittstelle wie die sortierten Binärbäume, d.h. wir können die Modellierung der Klasse **Tree** aus Info 1 - Vorlesung 12 wiederverwenden.
- Wir ergänzen noch eine Methode
  - contains (key: Integer): Boolean**

Die Methode **contains ()** liefert **true**, wenn mindestens ein Knoten im Baum den Wert **key** hat.

AVLTree
-height
+isEmpty()
+insert()
+contains()
+find()
+delete()

### Modellierung von AVL-Baumknoten

- Um jederzeit über die Höhendifferenzen der Knoten Bescheid zu wissen, definieren wir außerdem ein zusätzliches Attribut **hdiff** in der Knoten-Klasse, die wir **AVLNode** nennen:



- Damit die AVL-Bedingung eingehalten ist, darf **hdiff** nur die Werte -1, 0 oder 1 annehmen.

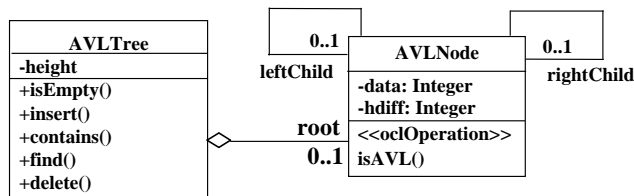
## Spezifikations-Operationen (1)

- ❖ Manchmal ist es sinnvoll, für eine Klasse Attribute oder Operationen zu definieren, die wir nur zur Spezifikation der Verträge brauchen. UML definiert dafür einen Stereotyp `<<oclOperation>>`.
- ❖ Wir können beispielsweise die AVL-Bedingung so spezifizieren:
- ❖ **Spezifikation AVL-Bedingung:** Sei  $k$  ein beliebiger Knoten im AVL-Baum.
  - Für  $k$  gilt:  $\mathbf{abs}(k.\mathbf{hdiff}) \leq 1$
  - Wenn  $k$  einen linken Kindknoten  $l$  hat, dann gilt die AVL-Bedingung auch für  $l$ .
  - Wenn  $k$  einen rechten Kindknoten  $r$  hat, dann gilt die AVL-Bedingung auch für  $r$ .
- ❖ Diese rekursive Definition brauchen wir bei der Implementation von AVL-Bäumen nicht, bei der Spezifikation von Vor- und Nachbedingungen von AVL-Baumoperationen ist sie aber nützlich.
- ❖ Wir deklarieren sie deshalb in OCL als Spezifikations-Operation.

## Spezifikations-Operationen (2)

- ❖ **Definition Spezifikations-Operation:** Eine Operation, die mit dem Stereotyp `<<oclOperation>>` als Präfix versehen ist.
- ❖ Für Spezifikations-Operationen gilt:
  - Die Operation kann im UML-Modell sichtbar gemacht werden.
  - Die Operation muss in keiner Implementation des Modells erscheinen. Sie wird nur für Spezifikationszwecke benutzt.
  - Spezifikations-Operationen kann man z.B. sehr gut beim Überprüfen von Invarianten, Vor- und Nachbedingungen einsetzen.
- ❖ Bemerkung:
  - Bei der Konstruktion von Programmen können Spezifikations-Operationen oft so wichtig werden, dass man sie auch bei der Implementation sinnvoll einsetzen kann.
  - ⇒ Laufzeitüberprüfung von Vor- und Nachbedingungen

## Alternative Modellierung der AVL-Bedingung durch Spezifikations-Operation `isAVL`



### OCL-Modell:

**AVLNode::isAVL(): Boolean**

```

post: result =
    (abs(hdiff) <= 1) and
    (leftChild->notEmpty implies leftChild.isAVL()) and
    (rightChild->notEmpty implies rightChild.isAVL())
    
```

Optionale Attribute (mit Multiplizität 0..1) werden in OCL als Menge behandelt. Damit kann einfach überprüft werden, ob das Attribut vorhanden ist oder nicht.

## Spezifikation der Operationen für AVL-Bäume

- ❖ **Idee:** Wiederverwendung der Methoden `insert()`, `find()` und `delete()` für sortierte Binärbäume aus Info I - Vorlesung 12.
- ❖ **Frage:** Welche dieser Methoden können die AVL-Bedingung verletzen?
- ❖ Durchsuchen ändert den Zustand des durchsuchten Baums nicht  
⇒ `find()` kann ohne Änderungen wiederverwendet werden
- ❖ Einfügen und Löschen ändern den Zustand des Baums  
⇒ `insert()` und `delete()` müssen so angepasst werden, dass sie die AVL-Bedingung einhalten
- ❖ Im folgenden betrachten wir die Spezifikation und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die Implementierung für die `insert()`-Operation.
- ❖ Für `delete()` verläuft die Entwicklung im wesentlichen analog.

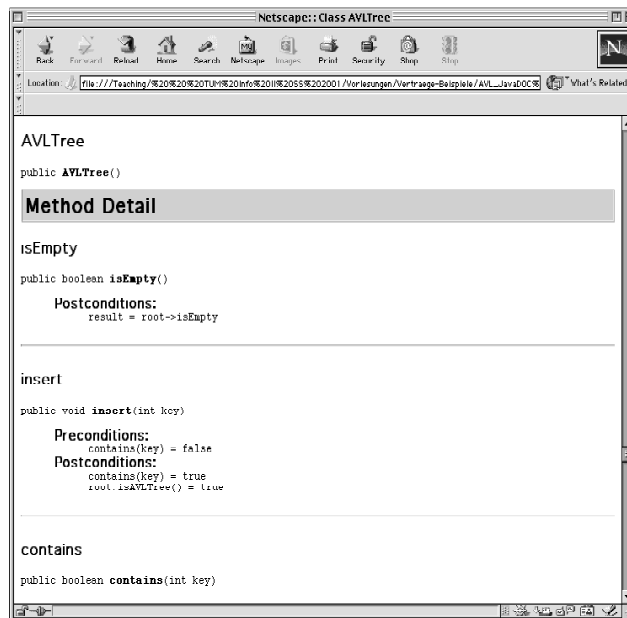
## OCL Spezifikation der insert ()-Operation

- ❖ Zum Einfügen von Elementen in AVL-Bäumen wollen wir die Methode **insert ()** aus Info I - Vorlesung 12 zum Einfügen von Elementen in sortierten Binärbäumen wiederverwenden.
- ❖ Nachbedingung zur Spezifikation von **insert ()**:  
AVLTree::insert(key: Integer)  
post: contains(key) = true
- ❖ Beispiel für eine Vorbedingung:  
Wir wollen das mehrfache Einfügen von Elementen verhindern.  
AVLTree::insert(key: Integer)  
pre: contains(key) = false
- ❖ Forderung: Alle Knoten des Baums erfüllen auch nach dem Einfügen eines Elements die AVL-Bedingung:  
AVLTree::insert(key: Integer)  
post: root.isAVL() = true

## Spezifikation der Schnittstelle von insert () in Java und Javadoc

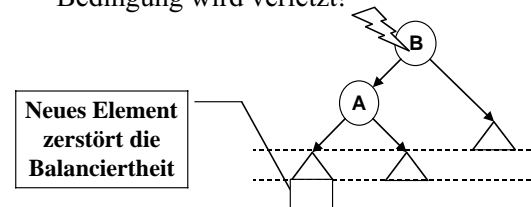
```
class AVLTree {
    private AVLNode root;
    public boolean isEmpty() {...}
    /**
     * @pre contains(key) = false
     * @post contains(key) = true
     * @post root->isAVL() = true
     */
    public void insert(int key) {...}
    public boolean contains(int key) {...}
    public AVLNode find(int key) {...}
    public void delete(int key) {...}
} // AVLTree
```

## Dokumentation der Schnittstelle von insert ()



## Ein AVL-Baum kann durch insert () unbalanciert werden

- ❖ Während wir **insert ()** ausführen, kann direkt nach dem Einfügen des Elements der Baum unbalanciert werden, d.h. die AVL-Bedingung wird verletzt!



- ❖ In diesem Fall müssen wir den Baum vor Ende der Ausführung von **insert ()** wieder balancieren.
- ❖ Zur Balancierung des AVL-Baums führen wir eine oder mehrere sogenannte **Rotationen** durch.
  - Ziel: Ausgleich der Höhendifferenz durch Änderung der Baumstruktur bei Erhaltung der Sortiertheit

## Zusammenfassung von Rotationen

### ❖ Einfache Rotation

– Einfache Rotationen verwendet man, nachdem ein neues Element *außen* an einen AVL-Baum angehängt wurde, und der Baum dadurch unbalanciert wird. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Der Knoten wird links außen angehängt: Rechtsrotation
2. Der Knoten wird rechts außen angehängt: Linksrotation

### ❖ Doppelrotation:

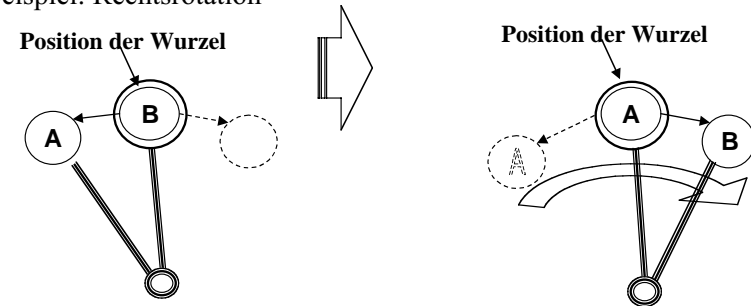
– Doppelrotationen benötigt man, nachdem ein neues Element *in der Mitte* an einen AVL-Baum angehängt wurde, und der Baum dadurch unbalanciert wird. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Der Knoten wird im rechten Unterbaum eingehängt:  
Wir machen erst eine Linksrotation, dann eine Rechtsrotation
2. Der Knoten wird im linken Unterbaum eingehängt:  
Wir machen erst eine Rechtsrotation, dann eine Linksrotation

## Was bedeutet Rotation?

❖ **Idee hinter dem Begriff:** Stellen Sie sich vor, die Knoten eines 3-elementigen Baums sind auf den Speichen eines Rades angeordnet. Das Rad wird dann um eine Position nach links oder rechts "rotiert". Die Position der Wurzel ist dabei fest.

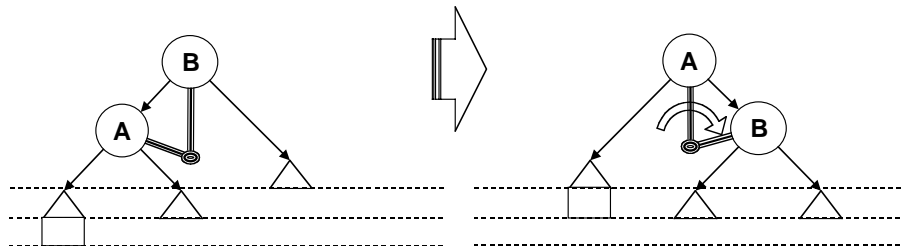
❖ Beispiel: Rechtsrotation



## Balancierung von AVL-Bäumen: Einfache Rotationen

❖ Einfache Rotationen verwendet man, nachdem ein neues Element *außen* an einen AVL-Baum abgehängt wurde, und der Baum dadurch unbalanciert wird.

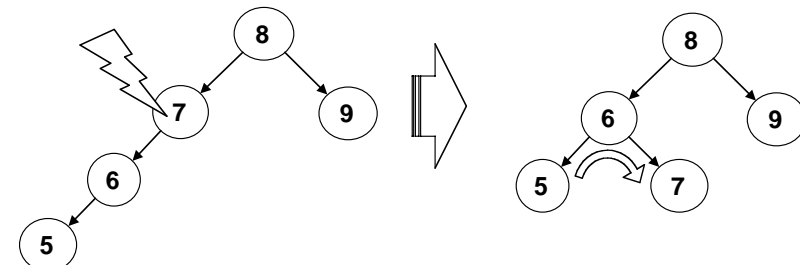
❖ Beispiel: Rechtsrotation



## Beispiel: Einfache Rotation in AVL-Bäumen

❖ Einfügen von Knoten 5

- AVL-Bedingung ist verletzt für Knoten 7. Warum?
- $h(6) - h(7.r) = 2$  (siehe AVL-Bedingung auf Folie 19)

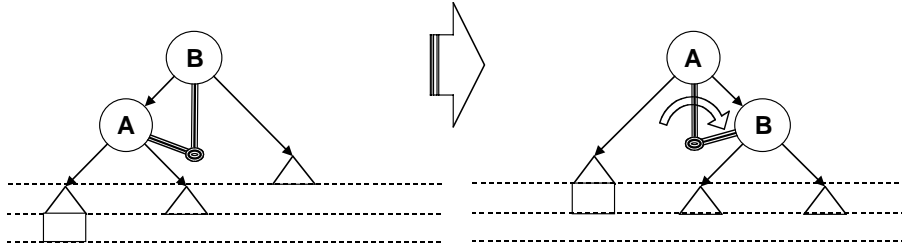


❖ Zur Wiederherstellung der Einhaltung der AVL-Bedingung genügt eine Rechtsrotation.

❖ Leichte Komplikation, wenn Knoten 6 vor der Rotation einen rechten Unterknoten hat

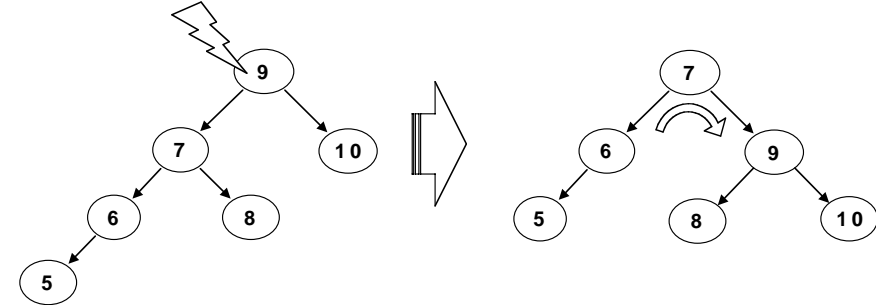
## Überkreuz-Zug (cross-over move)

- ❖ Wenn **A** auch einen rechten Unterknoten hat, ist ein sogenannter Überkreuz-Zug notwendig:
  - Bei der einfachen Rotation wird der rechte Unterknoten von **A** (der ja größer ist als **A**) als linker Unterknoten von **B** eingehängt (denn er ist kleiner als **B**):



## Beispiel: Überkreuz-Zug in AVL-Bäumen

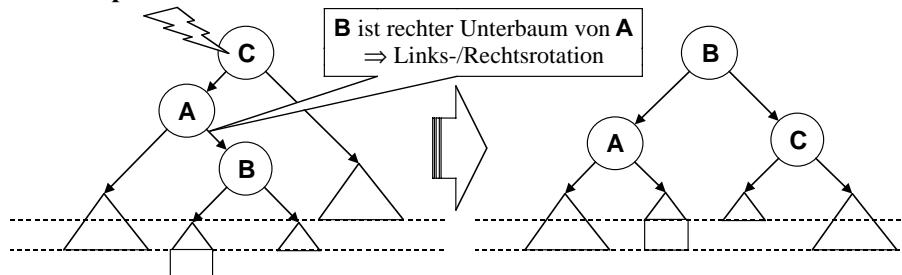
- ❖ Einfügen von Knoten **5**
  - AVL-Bedingung verletzt für Knoten **9**. Warum?
  - $h(7) - h(10) = 2$



- ❖ Nach dem Überkreuz-Zug über Knoten **9** ist die AVL-Bedingung wieder erfüllt.

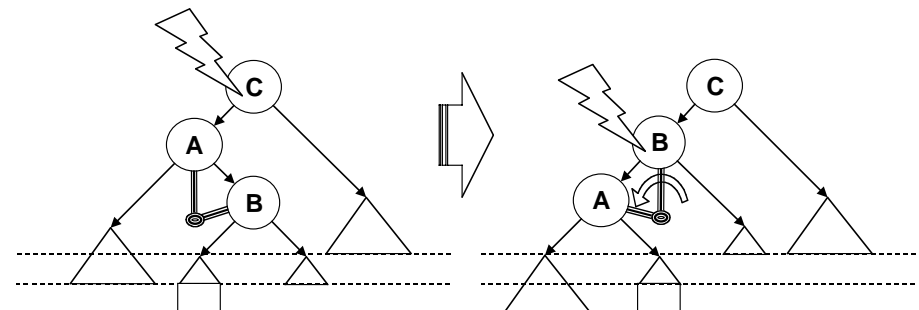
## Balancierung von AVL-Bäumen: Doppelrotation

- ❖ Doppelrotationen benötigt man, wenn ein neues Element *in der Mitte* an einen AVL-Baum angehängt wird, und der Baum dadurch die Balance verliert. Eine Doppelrotation besteht aus 2 Einzelrotationen:
  - Der Knoten wird im rechten Unterbaum eingehängt  $\Rightarrow$  Linksrotation, gefolgt von Rechtsrotation
  - Der Knoten wird im linken Unterbaum eingehängt  $\Rightarrow$  Rechtsrotation, gefolgt von Linksrotation
- ❖ **Beispiel:** Links-/Rechtsrotation



## Die Doppelrotation im Detail (1)

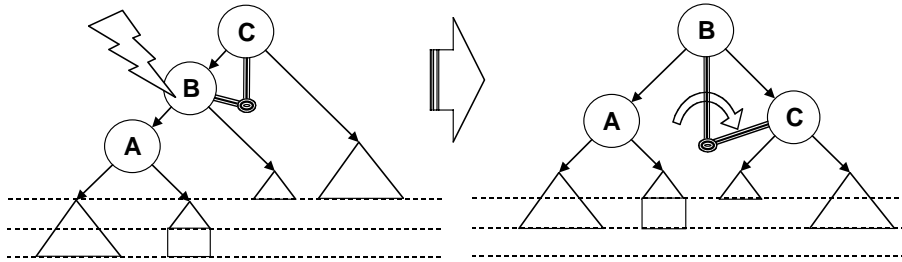
- ❖ Während der doppelten Rotation wird zunächst der Unterbaum, der die AVL-Bedingung verletzt, durch **Linksrotation** (evtl. mit Überkreuz-Zug) zu einem äußeren Knoten gemacht:



- ❖ Die Verletzung der AVL-Bedingung ist damit noch nicht beseitigt! Deshalb benötigen wir den zweiten Rotationsschritt.

## Die Doppelrotation im Detail (2)

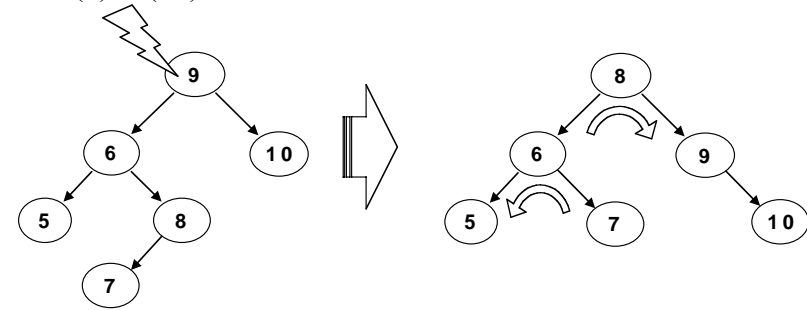
- ❖ Durch die unmittelbar **anschließende Rechtsrotation** (evtl. mit Überkreuz-Zug) wird der Teilbaum, der die Verletzung der AVL-Bedingung verursacht hat, um eine Stufe nach "oben" gezogen:



- ❖ Danach ist die AVL-Bedingung wieder erfüllt.

## Beispiel: Doppelrotation in AVL-Bäumen

- ❖ Einfügen von Knoten 7
  - AVL-Bedingung verletzt für Knoten 9. Warum?
  - $h(6) - h(10) = 2$



- ❖ Nach der Doppelrotation (Links-/Rechtsrotation) über die Knoten 6 und 9 ist die AVL-Bedingung wieder erfüllt.

## Algorithmus für die Implementation von insert ()

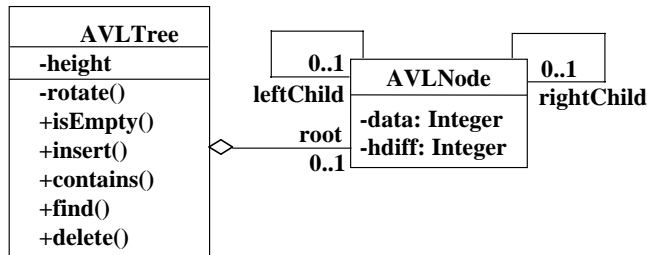
1. Zunächst fügen wir den neuen Knoten  $x$  ein (wie beim binären Suchbaum)
2. Von der Einfügeposition gehen wir den Pfad zurück in Richtung Wurzel
3. Für jeden Knoten  $k$ , den wir auf diesem Pfad erreichen, vergleichen wir den aktualisierten Wert von **hdiff** mit dem alten Wert (vor dem Einfügen des Knotens  $x$ ). Dabei unterscheiden wir 3 Fälle:
  - **(abs(hdiff@pre) = 1) and (hdiff = 0)**:  
 $k.l$  und  $k.r$  wurden durch das Einfügen auf gleiche Höhe gebracht, d.h.  $h(k)$  hat sich nicht geändert: fertig mit **insert ()**
  - **(hdiff@pre = 0) and (abs(hdiff) = 1)**:  
 $h(k.l)$  und  $h(k.r)$  unterscheiden sich nach dem Einfügen um 1, d.h. auch  $h(k)$  hat sich um 1 erhöht; **hdiff** muss also auch für den Vater von  $k$  aktualisiert werden: Überprüfung mit dem Vaterknoten fortsetzen
  - **abs(hdiff@pre) = 1) and (abs(hdiff) = 2)**:  
 Knoten  $k$  wurde durch das Einfügen aus der Balance gebracht:  
 Rotation zur Ausbalancierung durchführen: fertig mit **insert ()**.

## Algorithmus für die Implementation von delete ()

- ❖ Analog zu **insert ()**
  1. Löschen des Knotens (wie beim sortierten Binärbaum)
  2. Ausbalancieren des Baums
- ❖ **Wichtig:** Anders als beim Einfügen können beim Löschen mehrere Rotationen zum Ausbalancieren des Baums erforderlich sein (maximal eine für jeden Knoten auf dem Pfad vom gelöschten Knoten zur Wurzel des Baums).

## Modell eines AVL-Baumes (Revidierte Version)

UML-Modell:



Zusätzliche Vor-/Nachbedingungen:

```

AVLTree::rotate(node: AVLNode)
pre: abs(node.hdiff) > 1
post: abs(node.hdiff) <= 1
  
```

## Komplexität von Operationen auf AVL-Bäumen (1)

❖ Für die maximale Anzahl von Knoten  $n$  gilt folgende Ungleichung:

$$2^{h+1} - 1 \geq n \geq F_{h+1} - 1$$

wobei  $F_{h+1} = 1/\sqrt{5} \cdot [(1/2 \cdot (1 + \sqrt{5}))^{h+1} - (1/2 \cdot (1 - \sqrt{5}))^{h+1}]$   
(siehe Goos II (S. 248) oder optionale Hausaufgabe 27e aus Info I)

❖ Die obere Schranke gilt nach der Definition von Binärbäumen der Höhe  $h$ .

❖ Die untere Schranke haben wir in dieser Vorlesung bewiesen.

❖ Addieren wir 1 und logarithmieren die Ungleichung  $n + 1 \geq F_{h+1}$ , dann erhalten wir:

$$c \cdot \log_2 n + 1 \geq h \quad (c < 2)$$

❖ Das bedeutet, dass die Höhe eines AVL-Baums von der Wurzel bis zu einem beliebigen Knoten höchstens  $2 \cdot \log_2 n + 1$  ist.

– Die Suchoperationen **find()** und **contains()** haben deshalb im schlechtesten Fall die Komplexität  $O(\log n)$ .

## Komplexität von Operationen auf AVL-Bäumen (2)

❖ Komplexität für Einfügen und Löschen in sortierten Binärbäumen:  $O(h)$

– im AVL-Baum gilt:  $h = O(\log n)$

– Notwendige Rotationen sind in konstanter Zeit  $O(1)$  durchführbar.

❖ Ausbalancieren nach Einfügen erfordert höchstens eine (einfache oder doppelte) Rotation

⇒ Komplexität von **insert()**:  $O(\log n) + O(1) = O(\log n)$

❖ Ausbalancieren nach Löschen erfordert höchstens  $h$  (einfache oder doppelte) Rotationen

⇒ Komplexität von **delete()**:  $O(\log n) + O(\log n) = O(\log n)$

❖ Einfügen und Löschen in AVL-Bäumen haben also auch im schlechtesten Fall eine Komplexität von  $O(\log n)$ .

## Zusammenfassung

❖ Prädikatenlogik ist eine Verallgemeinerung der Aussagenlogik

– Variablen

– Quantoren

❖ Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit von Prädikaten

❖ Termersetzungsregeln für Prädikate

❖ Quantoren in OCL

❖ Anwendungsklassen vs. Lösungsklassen

❖ AVL-Bäume

❖ Rotation in AVL-Bäumen

– Einfache Rotation

– Doppelrotation

❖ Komplexität der AVL-Baum-Operationen:  $O(\log n)$