

Einführung in die Informatik I
Boolesche Algebra

Prof. Bernd Brügge, Ph.D
Technische Universität München

Wintersemester 2000/2001

14. November 2000

Überblick über den Vorlesungsblock

- ❖ Rubrik Sonstiges
- ❖ Repräsentation vs Information
- ❖ Interpretation
- ❖ Semantische Äquivalenz
- ❖ Informationssystem
- ❖ Boolesche Algebra
- ❖ Termersetzungssysteme
 - Algorithmen als Termersetzungssysteme
- ❖ Termersatzungsregeln
- ❖ Korrektheit von Termersetzungssystemen
- ❖ Aussagenlogik
- ❖ **Literatur:** Broy: Kapitel 1 - 3 oder Goos: Kapitel 1- 4.

Rubrik Sonstiges

- ❖ Ablegen der Folien auf der Info 1 Hausseite hat gestern nur für eine Stunde geklappt. Wir versuchen es noch mal.
- ❖ Vielen Dank für die Vorschläge, die Folien ins Netz zu bringen. Von denen, die die Zusatzaufgabe gelöst haben:
 - Preisträger werden am nächsten Montag bekanntgegeben.
- ❖ Am Freitag, den 17. November, ist der Tag der Informatik. Die Tutorgruppen enden um 14:00 Uhr. Studenten in Gruppen, die regulär danach beginnen, sollten sich zu früheren Gruppen gesellen (auch am Donnerstag).
- ❖ Der Wellen-Algorithmus
- ❖ Die Welle ist auch in der Info 1 Hausseite zu finden

Repräsentation versus Information

- ❖ Wir haben bisher Zeichenketten für Strichzahlen betrachtet:

- IIII IIII + II = IIIIII



- <IIII> <IIII> * <II> = <IIIIIII>

- ❖ Warum haben wir zwei verschiedenen Repräsentationen gewählt?
- ❖ Was bezeichnen wir mit III und <IIII>? Die Zahl 3?
- ❖ Es ist schwer die Zahl "3" zu beschreiben, denn auch 3 ist eine Repräsentation!
- ❖ Plato würde sagen: Die natürlichen Zahlen, von denen "3" ein Mitglied ist, sind eine Idee (ähnlich wie "Schönheit" eine Idee ist). Die natürlichen Zahlen *existieren*, sie sind genauso real wie dieser Tisch hier, aber man kann nicht auf sie zeigen.
 - III, <IIII> und 3 sind verschiedenen Repräsentationen (Plato: Schatten) der Idee "natürliche Zahl 3".
 - Statt "Idee" benutzen wir den Begriff "Information".

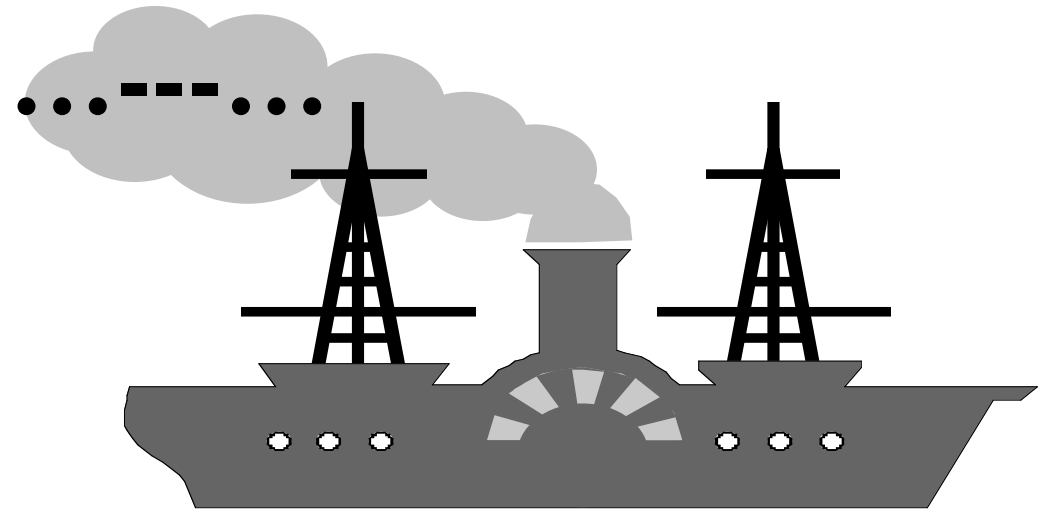
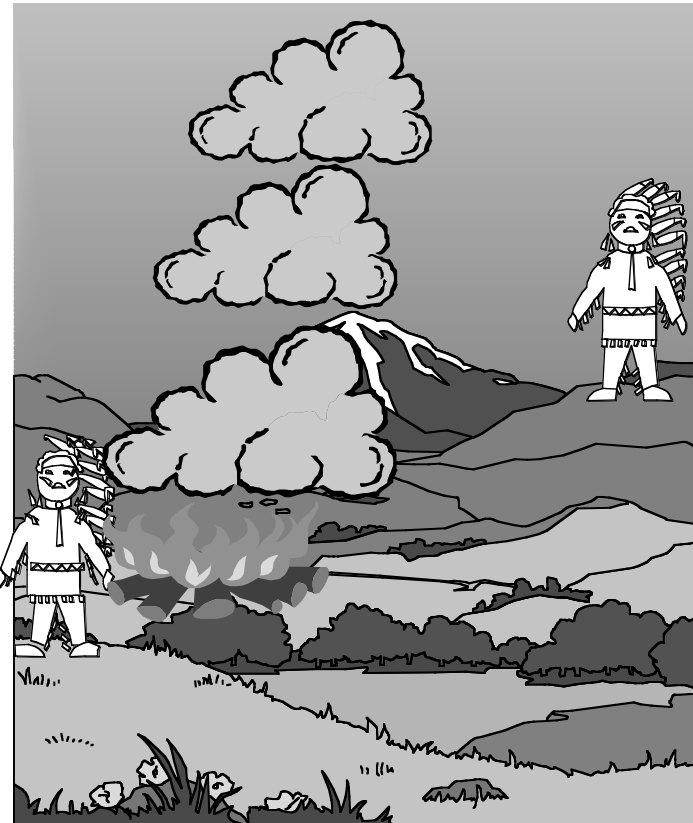
Nachricht, Repräsentation, Information

- ❖ **Signal:** Die Darstellung einer Mitteilung durch die zeitliche Veränderung einer physikalischen Größe.
 - Beispiel: Akustische Welle, Lichtwelle, elektromagnetische Welle.
- ❖ **Inschrift:** Die dauerhafte Darstellung einer Mitteilung auf einem physikalischem Medium (Schriftträger).
 - Beispiel: Aufzeichnung auf einer CD, auf einem Stück Papier, auf einem Magnetband.
- ❖ **Nachricht:** Eine Mitteilung, bei der wir von dem Übertragungsmedium und der Darstellung durch Signale oder Inschriften abstrahieren (Eine Nachricht ist entweder eine Signal oder eine Inschrift).
 - Beispiel: Es interessiert uns bei der Mitteilung nicht, ob sie per Fax, E-Mail oder mit der normalen Post gekommen ist.
- ❖ **Repräsentation:** Die äußere Form einer Nachricht
- ❖ **Information:** Der abstrakte Gehalt einer Nachricht.
Auch: Die *Bedeutung (Semantik)* einer Nachricht.

Formen von Nachrichten

- ❖ Repräsentation ist die äußere Form der Darstellung einer Nachricht. Mögliche Formen sind
 - Ausdrücke (z.B. <llll>, llll, 3)
 - Graphiken (z.B. Klassendiagramme, Instanzdiagramme)
 - Anweisungen (z.B. 79° C, 79° F)
 - Aussagen (z.B. "Heute ist Sonntag", "Heute ist Montag")
 - Nachrichten (z.B. "Ich brauche Hilfe")
 - Piktogramme oder Ikonen (z.B.  , )
- ❖ Hinter jeder Repräsentation müssen wir die eigentliche Information finden.

Information: Die Bedeutung einer Repräsentation



**Drei verschiedene Repräsentationen derselben Information:
*„Ich bin in Not. Ich brauche sofort Hilfe!“***

Interpretation, Informationsbezugssystem

- ❖ **Definition Interpretation:** Der Vorgang der Ermittlung der Information aus einer Repräsentation. Geschieht normalerweise
 - **Statisch durch ein Wörterbuch:** Auflistung Nachricht, Information
 - oder **prozedural durch eine Interpretationsvorschrift**, die für jede Nachricht die jeweilige Information liefert.
- ❖ **Definition Informationsbezugssystem:** Die Menge der Gegenstände und Beziehungen zwischen Gegenständen, die nötig sind, um Information aus einer Repräsentation zu ermitteln.
- ❖ Das Informationsbezugssystem wird oft nicht explizit genannt, da es aus dem Zusammenhang klar wird. Beispiele:
 - 79° bedeutet 79° Fahrenheit, wenn ich in den USA bin.
 - 79° bedeutet 79° Celsius, wenn ich in Italien bin.
 - „*Was ist Deine Position?*“ bedeutet
 - ◆ in einem Navigationssystem: „*Was sind Deine x-/y-/z-Koordinaten*“
 - ◆ in einem Organisationssystem: „*Was ist Dein Rang in der Hierarchie?*“

Interpretationen als Abbildungen

- ❖ Nicht jede Repräsentation stellt eine Information dar: „!@#\$“
Informationen ohne Repräsentationen sind auch nicht sinnvoll.
 - Für die Verarbeitung von Informationen durch Informatiksysteme wird immer eine Repräsentation benötigt.
- ❖ Wir können den Begriff Interpretation auch als mathematische Abbildung modellieren:
 - Sei R eine Menge von Repräsentationen, und A eine Menge von Informationen.
 - Die **Interpretation $I : R \rightarrow A$** ordnet der gegebenen Repräsentation r einer Nachricht eine Information $I[r]$ zu.
- ❖ **Definition:** Wir bezeichnen (A, R, I) auch als **Informationssystem**, R heißt **Repräsentationssystem**, A nennt man **semantisches Modell**.
 - Beispiel: $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{I, II, III, \dots\}$ sind Elemente des Repräsentationssystems R für die natürlichen Zahlen.

Semantische Äquivalenz

- ❖ Häufig gibt es verschiedene Repräsentationen für dieselbe Information. Wir nennen diese Repräsentationen dann **semantisch äquivalent**.
- ❖ **Definition:** In einem Informationssystem (A, R, I) heißen zwei Repräsentationen $r1, r2 \in R$ semantisch äquivalent, falls sie die gleiche Information darstellen:

$$- I[r1] = I[r2]$$

r1

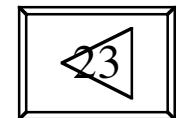


$I[r1] = \text{"Ich brauche Hilfe!"}$

r2



$I[r2] = \text{"Ich brauche Hilfe!"}$



Aussagenlogik

- ❖ Wir hatten gesagt, dass Nachrichten in verschiedenen Formen auftreten (Folie 5)
- ❖ Eine der wichtigsten Formen von Nachrichten sind Aussagen.
- ❖ Beispiele von Aussagen:
 - „Der neue USA Präsident ist gewählt.“
 - „Das Oktoberfest ist immer im Januar.“
 - „Es ist 79 Grad.“
- ❖ Aussagen beziehen sich immer auf ein bestimmtes System, d.h. die Komponenten und ihre Beziehungen untereinander.
 - **Definition:** Wir nennen das System im Zusammenhang mit Aussagen das **Bezugssystem**.
- ❖ Für ein feststehendes Bezugssystem ist eine Aussage entweder wahr oder falsch.

Aussagenlogik

- ❖ Nicht alles was wie eine Aussage aussieht, ist auch eine:
- ❖ Beispiel: "Ich lüge" ist keine Aussage:
 - Nehmen wir an die Aussage "Ich lüge" ist wahr, dann führt sie zum Widerspruch, denn ich lüge, als muß die Aussage falsch sein.
 - Nehmen wir an die Aussage "Ich lüge" ist falsch, dann führt sie auch zum Widerspruch, denn dann lüge ich ja nicht, also muß die Aussage wahr sein.
- ❖ Derartige Paradoxien können wir vermeiden, indem wir Aussagen vermeiden, die sich auf sich selbst beziehen.
- ❖ Zusätzlich werden wir ein eingeschränktes Repräsentationssystem definieren, indem wir nur "wohlerzogene" Aussagen zulassen.
- ❖ Die Definition von "wohlerzogenen" Aussagen ist ähnlich der Definition der syntaktisch korrekten Terme einer Algebra. In der Tat definieren wir die Aussagenlogik als Algebra.

Das kleinste möglichen Informationssystem

- ❖ In einem Informationssystem (A, R, I) ist R eine Menge von Repräsentationen und A eine Menge von Informationen.
- ❖ Wir schauen uns jetzt eines der kleinsten Informationssysteme an, nämlich das, in dem A nur 2 Elemente hat.
Diese Elemente werden oft unterschiedlich bezeichnet:
 - ◆ {Wahr, Falsch}
 - ◆ {True, False}
 - ◆ {L, O}
 - ◆ {Ja, Nein}
- ❖ Wir verwenden die Menge **{True, False}**.

Boolesche Algebra

- ❖ Wir können $\{True, False\}$ als Teilmenge der Elementaroperanden einer Algebra sehen, der sogenannten **Booleschen Algebra**.
- ❖ **Zur Erinnerung:** $A = (M, \Sigma, Q)$ heißt eine **konkrete Algebra**, wenn
 - eine Signatur Σ , eine Menge X von Elementaroperanden, eine Menge von korrekten Termen und eine Trägermenge M mit $X \subseteq M$ gegeben ist
 - und wenn es zu jeder Operation $f \in \Sigma$ eine konkrete Funktion $f_M : M \rightarrow M$ gibt, für welche die Gesetze von Q gelten.

4 Schritte zur Definition einer Booleschen Algebra $B = (M, \Sigma, Q)$:

1. Wir bestimmen zunächst die Elementaroperanden und Signatur Σ .
2. Dann definieren wir die Menge aller booleschen Terme.
3. Dann definieren wir die konkreten Funktionen über einer Trägermenge.
4. Schließlich definieren wir die Gesetze Q .

1. Schritt: Definition der Signatur

Elementaroperanden $ID = \{a, b, c, x, y, z\}$

- Die Elementaroperanden werden auch Identifikatoren oder boolesche Variable genannt.

$\Sigma = \{$

false,

(Konstante)

true,

(Konstante)

\neg : $ID \rightarrow ID,$

Negation (Einstellig)

\wedge : $ID \times ID \rightarrow ID,$

And (Zweistellig)

\vee : $ID \times ID \rightarrow ID,$

Or (Zweistellig)

\Rightarrow : $ID \times ID \rightarrow ID,$

Implikation (Zweistellig)

\Leftrightarrow : $ID \times ID \rightarrow ID,$

Äquivalenz (Zweistellig)

}

2. Schritt: Korrekte Boolesche Terme

- ❖ **Definition:** Die Menge der (syntaktisch korrekten) Booleschen Terme ist dann wie folgt definiert:
 - **true** und **false** sind Boolesche Terme
 - Alle Elemente von ID sind Boolesche Terme
 - Ist t ein Boolescher Term, so ist auch $\neg t$ ein Boolescher Term
 - Sind $t1$ und $t2$ Boolesche Terme, dann sind auch $t1 \vee t2$ und $t1 \wedge t2$ Boolesche Terme
 - Sind $t1$ und $t2$ Boolesche Terme, dann sind auch $t1 \Rightarrow t2$ und $t1 \Leftrightarrow t2$ Boolesche Terme.

Beispiel von Booleschen Termen

$$(x \vee y) \quad (x \wedge y) \quad (\text{true} \vee \text{false})$$
$$(\neg x \vee y) \wedge (y \vee x)$$

- ❖ Um unnötige Klammern zu vermeiden, führen wir Prioritäten von Operationen ein:
 - Der Negations-Operator \neg bindet stärker als die binären Operationen \wedge , \vee , \Rightarrow und \Leftrightarrow
 - Der Operator \wedge bindet stärker als \vee .
 - Am schwächsten binden die Operatoren \Rightarrow und \Leftrightarrow

$$x \vee y \quad x \wedge y \quad \text{true} \vee \text{false}$$
$$(\neg x \vee y) \wedge (y \vee x)$$
$$\neg x \vee y \wedge y \vee x$$

3. Schritt: Definition der konkreten Funktionen

- ❖ Bisher haben wir Boolesche Terme als syntaktisch korrekte Terme gesehen.
- ❖ Der Hauptzweck von Booleschen Termen ist aber die Repräsentation von Information.
 - Wir wollen also jedem Booleschen Term einen Wahrheitswert zuordnen.
 - Um das zu machen, brauchen wir allerdings zunächst einmal einen präzisen Begriff für die Interpretation von Booleschen Termen.
- ❖ Zur Auffrischung: Die **Interpretation $I : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{A}$** ordnet der gegebenen Repräsentation r einer Nachricht eine Information $I[r]$ zu.
 - Für \mathbf{A} verwenden wir die Menge \mathbb{B} der *booleschen Wahrheitswerte*. Wir benutzen dabei folgende Definition:
$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Abbildungen zwischen Wahrheitswerten

$$\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$\neg 0 = 1$$

$$\neg 1 = 0$$

$$\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$0 \vee 0 = 0$$

$$0 \vee 1 = 1$$

$$1 \vee 0 = 1$$

$$1 \vee 1 = 1$$

$$\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$0 \wedge 0 = 0$$

$$0 \wedge 1 = 0$$

$$1 \wedge 0 = 0$$

$$1 \wedge 1 = 1$$

$$\Rightarrow : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$0 \Rightarrow 0 = 1$$

$$0 \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 \Rightarrow 0 = 0$$

$$1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$0 \Leftrightarrow 0 = 1$$

$$0 \Leftrightarrow 1 = 0$$

$$1 \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

Interpretation von Booleschen Termen

Definition: Eine Abbildung $f: ID \rightarrow IB$, die jedem Element aus ID einen Wahrheitswert zuordnet, heißt **Boolesche Belegung**.

❖ **Beispiel einer Belegung f für $ID = \{a,b,c, x, y, z\}$:**

- $\beta [a] = L$
- $\beta [b] = O$
- $\beta [c] = L$
- $\beta [x] = L$
- $\beta [y] = L$
- $\beta [z] = L$

❖ **Beispiel einer anderen Belegung f_1 für $ID = \{a,b,c, x, y, z\}$:**

- $\beta_1 [a] = O$
- $\beta_1 [b] = O$
- $\beta_1 [c] = L$
- $\beta_1 [x] = O$
- $\beta_1 [y] = O$
- $\beta_1 [z] = O$

- Die Menge aller Belegungen heißt ENV . Also: $\beta, \beta_1 \in ENV$.
- Für eine gegebene Belegung f läßt sich nicht nur den Elementen aus ID , sondern jedem Booleschen Term ein Wahrheitswert zu ordnen.
- Wir definieren dafür die Interpretation I_β .

Interpretation I_β von Booleschen Termen

- ❖ $I_\beta[\mathbf{True}] = L$ $I_\beta[\mathbf{False}] = 0$
- ❖ $I_\beta[x] = \beta(x)$ d.h. für alle Elemente aus ID ist der Wahrheitswert der Wert, der sich aus der Belegung β ergibt.
 - Für unsere Beispiel Belegung β : $I_\beta[a] = \beta[a] = L$
- ❖ $I_\beta[\neg t] = \neg (I_\beta[t])$
 - d.h. wir finden den Wahrheitswert von $\neg t$, indem wir den Wahrheitswert von Term t finden, und ihn dann negieren (mit der Wahrheitstafel für **Negation** auf Folie 20).
- ❖ $I_\beta[t1 \vee t2] = I_\beta[t1] \vee I_\beta[t2]$
 - d.h. wir finden den Wahrheitswert von $t1 \vee t2$, indem wir die Wahrheitswerte von Term $t1$ und $t2$ finden, und sie dann mit Hilfe der Wahrheitstafel für \vee verknüpfen.
- ❖ $I_\beta[t1 \wedge t2] = I_\beta[t1] \wedge I_\beta[t2]$
- ❖ $I_\beta[t1 \Rightarrow t2] = I_\beta[t1] \Rightarrow I_\beta[t2]$
- ❖ $I_\beta[t1 \Leftrightarrow t2] = I_\beta[t1] \Leftrightarrow I_\beta[t2]$



Interpretation I_f von Booleschen Termen

- ❖ $I_\beta[\mathbf{True}] = \mathbf{L}$ $I_\beta[\mathbf{False}] = \mathbf{0}$
- ❖ $I_\beta[x] = \beta(x)$ d.h. für alle Elemente aus ID ist der Wahrheitswert der Wert, der sich aus der Belegung β ergibt.
 - Für unsere Beispiel Belegung β : $I_\beta[a] = \beta[a] = \mathbf{L}$

- ❖ β für $ID = \{a,b,c, x, y, z\}$:
 - $\beta[a] = \mathbf{L}$
 - $\beta[b] = \mathbf{0}$
 - $\beta[c] = \mathbf{L}$
 - $\beta[x] = \mathbf{L}$
 - $\beta[y] = \mathbf{L}$
 - $\beta[z] = \mathbf{L}$

Abbildung von Booleschen Termen

Signatur $\dot{I} = \{\text{True}, \text{False}, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Operationen

$I_\beta[\text{True}] = \mathbf{L}$ $I_\beta[\text{False}] = \mathbf{O}$

Konkrete Funktion

\neg :

\vee :

\wedge :

$\beta(x)$	$I_\beta[\neg x]$
O	L
L	O

$\beta(x)$	$\beta(y)$	$I_\beta[x \vee y]$
O	O	O
O	L	L
L	O	L
L	L	L

$\beta(x)$	$\beta(y)$	$I_\beta[x \wedge y]$
O	O	O
O	L	O
L	O	O
L	L	L

\Rightarrow :

\Leftrightarrow :

$\beta(x)$	$\beta(y)$	$I_\beta[x \Rightarrow y]$
O	O	L
O	L	L
L	O	O
L	L	L

$\beta(x)$	$\beta(y)$	$I_\beta[x \Leftrightarrow y]$
O	O	L
O	L	O
L	O	O
L	L	L

Vereinfachte Schreibweise für Wahrheitstafeln

❖ Die Symbole für Belegung β und Interpretation I_β werden in Wahrheitstafeln aus Übersichtlichkeitsgründen nicht gezeigt

\neg :

x	$\neg x$
O	L
L	O

\vee :

x	y	$x \vee y$
O	O	O
O	L	L
L	O	L
L	L	L

\wedge :

x	y	$x \wedge y$
O	O	O
O	L	O
L	O	O
L	L	L

\Rightarrow :

x	y	$x \Rightarrow y$
O	O	L
O	L	L
L	O	O
L	L	L

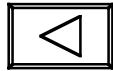
\Leftrightarrow :

x	y	$x \Leftrightarrow y$
O	O	L
O	L	O
L	O	O
L	L	L

Semantische Äquivalenz Boolescher Terme

❖ **Wiederholung der Definition der semantischen Äquivalenz**

– Folie 9



❖ **Definition:** Zwei boolesche Terme t_1, t_2 heißen **semantisch äquivalent**, falls sie für alle möglichen Belegungen $\beta \in ENV$ bezüglich der eben definierten Interpretation I_β gleich sind:

◆ $I_\beta[t_1] = I_\beta[t_2]$

❖ Da bei semantischer Äquivalenz die Gleichheit unabhängig von der Belegung ist, schreibt man auch

◆ $I[t_1] = I[t_2]$

4. Schritt: Definition von Booleschen Gesetzen

$$\mathbf{True = (x \vee \neg x)}$$

$$\mathbf{True = \neg False}$$

$$\mathbf{\neg \neg x = x}$$

$$\mathbf{x \wedge y = y \wedge x}$$

$$\mathbf{(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)}$$

$$\mathbf{x \wedge x = x}$$

$$\mathbf{x \vee (y \wedge \neg y) = x}$$

$$\mathbf{x \wedge (y \vee x) = x}$$

$$\mathbf{x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)}$$

$$\mathbf{\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)}$$

Gesetz für True

Gesetz für False

Involutionsgesetz

Kommutativgesetz

Assoziationsgesetz

Idempotenzgesetz

Neutralitätsgesetz

Absorptionsgesetz

Distributivgesetz

DeMorgan's Gesetz

Dualitätsprinzip

- ❖ Für Boolesche Gesetze gilt das Dualitätsprinzip:
 - Ein Boolesches Gesetz gilt auch, wenn wir **True** mit **False** und gleichzeitig \wedge mit \vee vertauschen.

- ❖ Beispiele:

True = $(x \vee \neg x)$ **(Gesetz für True)**

False = $(x \wedge \neg x)$ **(Anwendung des Dualitätsprinzips)**

$x \vee (y \wedge \neg y) = x$ **(Neutralitätsgesetz)**

$x \wedge (y \vee \neg y) = x$ **(Anwendung des Dualitätsprinzips)**

$\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$ **(De Morgan's Gesetz)**

$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$ **(Anwendung des Dualitätsprinzips)**

Äquivalenz und Implikation sind Abkürzungen

- ❖ Die Operatoren \Leftrightarrow (Äquivalenz) und \Rightarrow (Implikation) sind selbst Abkürzungen. Wir definieren folgende Gleichheiten:

$$\neg t1 \Rightarrow t2 = \neg t1 \vee t2$$

$$\neg t1 \Leftrightarrow t2 = (t1 \wedge t2) \vee (\neg t1 \wedge \neg t2)$$

- ❖ Wir können noch einen Schritt weitergehen. Der Operator \wedge (And) kann vollständig mit den Operatoren \neg (Negation) und \vee (Or) geschrieben werden.

$$\neg t1 \wedge t2 = \neg (\neg t1 \vee \neg t2)$$

- ❖ Der Operator \vee (Or) kann vollständig mit den Operatoren \neg (Negation) und \wedge (And) geschrieben werden können.

$$\neg t1 \vee t2 = \neg (\neg t1 \wedge \neg t2)$$

- ❖ Wir sagen auch, \vee und \wedge verhalten sich *dual* zueinander.

Wie finden wir semantische Äquivalenz? 11/14/00

❖ **Mit Wertetafeln:**

- Durchprobieren aller Belegungen β für alle möglichen Werte der Booleschen Terme.
- Dies ist sehr zeitaufwendig bei komplizierten Termen
 - ◆ Bei n Identifikatoren müssen wir 2^n Belegungen durchprobieren.

❖ **Durch Termersetzungssysteme:**

1. Wir *vereinfachen die Terme* durch Anwendung der Booleschen Gesetze:
 - ◆ Hierzu betrachten wir die Booleschen Gesetze als Regeln eines Textersetzungssystems.
2. Wir wenden die sogenannte *Substitutionsregel* an:
 - ◆ Diese Regel gestattet es, freie Identifikatoren durch Terme zu ersetzen.

Gültigkeit der Gesetze am Beispiel Absorptionsgesetz

Wir beweisen, daß $x \wedge (x \vee y) = x$ semantisch äquivalent sind

Wahrheitstabelle	$\beta(x)$	$\beta(y)$	$I_\beta[x \vee y]$	$I_\beta[x \wedge (x \vee y)]$
	O	O	O	O
O	L	L	L	O
L	O	L	L	L
L	L	L	L	L

Unter Weglassung der Belegung β und Interpretation I_β :

Wahrheitstabelle	x	y	$x \vee y$	$x \wedge (x \vee y)$
	O	O	O	O
O	L	L	L	O
L	O	L	L	L
L	L	L	L	L

Vereinfachung von Booleschen Termen

❖ Eingabe: $y \wedge \neg y$

❖ Ableitung:

$$y \wedge \neg y \Rightarrow \neg y \wedge y \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$\Rightarrow \neg y \wedge \neg \neg y \quad (\text{Involutionsgesetz})$$

$$\Rightarrow \neg (y \vee \neg y) \quad (\text{DeMorgan})$$

$$\Rightarrow \neg (\text{true}) \quad (\text{Gesetz für True})$$

$$\Rightarrow \text{false} \quad (\text{Gesetz für False})$$

❖ Also: $y \wedge \neg y \stackrel{*}{\Rightarrow} \text{false}$.

– Wir arbeiten hier rein syntaktisch, d.h. die Ableitung geschieht nur unter Anwendung von Booleschen Gesetzen.

❖ Wir können noch einen Schritt weiter gehen:

– Wir interpretieren $y \wedge \neg y$ und **false** als Boolesche Terme und sehen, daß die Ableitung $y \wedge \neg y \stackrel{*}{\Rightarrow} \text{false}$ bei jeder Belegung den Wert **0** ergibt, das heißt, die Aussage $y \wedge \neg y$ ist falsch.

Maschinelles Beweisen

- ❖ Was wir auch gemacht haben, ist aus gegebenen Booleschen Gleichungen durch Anwendungen von Gleichungen (die wir Gesetze nennen) andere Boolesche Gleichungen zu gewinnen.
 - Dies ist die zentrale Idee hinter Theorembeweisern, d.h. dem maschinellen Erstellen von Beweisen.
- ❖ Wir verwenden dabei die Tatsache, daß \Rightarrow eine **Äquivalenzrelation** ist:
 - **Reflexivität:** $t \Rightarrow t$
 - **Symmetrie:** Gilt $t1 \Rightarrow t2$, so gilt auch $t2 \Rightarrow t1$
 - **Transitivität:** Gilt $t1 \Rightarrow t2$ und $t2 \Rightarrow t3$, dann gilt auch $t1 \Rightarrow t3$
- ❖ Rein syntaktisch haben wir gezeigt, daß wir $y \wedge \neg y \stackrel{*}{\Rightarrow} \mathit{false}$ ableiten können. Durch Anwendung der Definition der Interpretation für Boolesche Terme (Folie 23) können wir dann zeigen daß $y \wedge \neg y = \mathit{false}$ gilt, d.h. beide Seiten der Gleichung bleiben bei jeder Gesetzanwendung semantisch äquivalent.

Definition Boolesche Algebra

- ❖ **Definition:** Eine Struktur $K = (\mathbb{B}, \Sigma, Q)$ mit
 - der Trägermenge $\mathbb{B} = \{O, L\}$,
 - der Signatur $\Sigma = \{\text{False}, \text{True}, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,
 - wobei jede Operation $f \in \Sigma$ durch die Wahrheitstafeln auf Folie 23 definiert ist
 - und den Gesetzen Q auf Folie 26ist ein konkretes Exemplar einer Booleschen Algebra

Substitutionsregel für Boolesche Terme

Gilt die semantische Äquivalenz für die boolesche Gleichung?

$$(w \wedge k) \wedge \neg (w \wedge z) = \neg (w \wedge z) \wedge (w \wedge k)$$

Ja, denn sie ist ein spezieller Fall des Kommutativgesetzes

$$x \wedge y = y \wedge x$$

Wir erhalten diesen Spezialfall indem wir den Identifikator x durch den Term $w \wedge k$ ersetzen, und den Identifikator y durch den Term $\neg (w \wedge z)$.

Wir schreiben:

$$[w \wedge k/x, \neg (w \wedge z)/y]$$

und lesen :

Substitution von x durch $w \wedge k$ und y durch $\neg (w \wedge z)$.

Definition Substitution bei Booleschen Termen

- ❖ Definition: Seien $t1$ und $t2$ Boolesche Terme mit freien Identifikatoren ID und sei x ein Identifikator.

Dann bezeichnen wir mit

$$t1[t2/x]$$

den Term, den wir aus $t1$ erhalten, indem wir den Identifikator x an allen Stellen in $t1$ durch den Term $t2$ ersetzen.

- ❖ Beispiel:

- $(x \wedge (\neg y))[False/x]$

- bedeutet: Ersetze alle x in dem Term $x \wedge (\neg y)$ durch **False**.

- ❖ Wir können die Substitutionsregel bei der Ableitung von Booleschen Gleichungen verwenden. Das heißt es gilt:

- $(x \wedge (\neg y))[False/x] = (False \wedge (\neg y))$ (Substitutionsregel)

- $= False$ (Eigenschaft von \wedge)

Zusammenfassung

- ❖ Repräsentation vs Information
- ❖ Eine besondere Gleichheit: Semantische Äquivalenz
- ❖ Boolesche Terme
- ❖ Interpretation von Booleschen Termen
- ❖ Boolesche Gesetze
- ❖ Vereinfachung von Booleschen Termen
- ❖ Wahrheitstafeln
- ❖ Substitutionsregel für Boolesche Terme
- ❖ Als nächstes:
 - Termersetzung über allgemeine Terme
 - Termersetzungssysteme