

Zentralübung zu  
Einführung in die Informatik I

Dr. Christian Herzog  
Technische Universität München

Wintersemester 2000/2001  
13. November 2000

# Übersicht

- ❖ Einführung in die Programmierung mit Java
  - Weitere Attribute zur Klasse Klausur
  - Aufruf von Methoden
- ❖ eine abstrakte Algebra und einige Konkretisierungen
  - abstrakte Algebra
  - Terme und Gesetze
  - Normalformen von Termen
  - konkrete Algebren

# Erweiterung der Java-Klasse Klausur:

```
class Klausur {  
    int punktzahl;        // z.B. 40, 17, 34, 0  
    double note;         // z.B. 1.0, 4.0, 1.3, 5.0  
    String praedikat;    // z.B. "sehr gut", "gut"  
  
    int getPunktzahl () {  
        return punktzahl;  
    }  
  
    double getNote () {  
        return note;  
    }  
  
    String getPraedikat () {  
        return praedikat;  
    }  
}
```

## Berechnung der Note statt Attribut für Note:

```
class Klausur {  
    int punktzahl;        // z.B. 40, 17, 34, 0  
    double note;        // z.B. 1.0, 4.0, 1.3, 5.0  
    double berechneNoteAusPunkten (int punkte) {  
        Methodenrumpf // das ist uns noch zu schwierig  
    }  
    int getPunktzahl () {  
        return punktzahl;  
    }  
    double getNote () {  
        return note;  
        return berechneNoteAusPunkten(getPunktzahl());  
    }  
}
```

# Eine abstrakte Algebra A

- ❖ In der folgenden abstrakten Algebra A sind die Bezeichner zunächst absichtlich nichtssagend gewählt:

Sorten:  $S = \{ \text{sort} \}$

Operationssymbole:  $F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$

Funktionalitäten:  $\text{op1}: \rightarrow \text{sort}$

$\text{op2}: \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

$\text{op3}: \text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

Gesetze: G1:  $\text{op3}(x, \text{op1}(\ )) = x$

G2:  $\text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$

- ❖ Was beschreibt diese Algebra?

# Betrachten wir die Terme von A

Die abstrakte Algebra A:

$$S = \{ \text{sort} \}$$

$$F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$$

$$\text{op1}: \rightarrow \text{sort}$$

$$\text{op2}: \text{sort} \rightarrow \text{sort}$$

$$\text{op3}: \text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$$

$$G1: \text{op3}(x, \text{op1}()) = x$$

$$G2: \text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$$

Zulässige Terme:

$$\text{op1}()$$

$$\text{op2}(\text{op1}())$$

$$\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))$$

$$\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}())))$$

$$\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))), \text{op1}())$$

$$\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))), \text{op2}(\text{op2}(\text{op1}())))$$

$$\text{op2}(\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))), \text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))))$$

# Betrachten wir die Gesetze von A

Die abstrakte Algebra A:

$S = \{ \text{sort} \}$

$F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$

$\text{op1}: \rightarrow \text{sort}$

$\text{op2}: \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

$\text{op3}: \text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

$G1: \text{op3}(x, \text{op1}()) = x$

$G2: \text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$

**Was beschreibt diese Algebra?**

Ausgangsterm:

$\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}())), \text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))))$

Anwendung von Gesetz G2 liefert:

$\text{op2}(\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}())), \text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))))$

Das kann man wiederholen:

$\text{op2}(\text{op2}(\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}())), \text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))))$

$\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}())), \text{op2}(\text{op1}()))))$

$\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op3}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}())), \text{op1}()))))$

... und schließlich G1 anwenden:

$\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op2}(\text{op1}()))))$

$\Rightarrow \text{op3}$  lässt sich eliminieren;

die Gesamtzahl der  $\text{op2}$  bleibt erhalten!

# Eine konkrete Algebra zu A

Die abstrakte Algebra A:

$S = \{ \text{sort} \}$

$F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$

$\text{op1}: \rightarrow \text{sort}$

$\text{op2}: \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

$\text{op3}: \text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

G1:  $\text{op3}(x, \text{op1}()) = x$

G2:  $\text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$

Was ist eine konkrete Algebra zu A?

- ❖ sie liefert eine (konkrete) Trägermenge K;
- ❖ sie ordnet jeder Operation von A (eigentlich jedem Operationssymbol von A) eine (konkrete) Operation auf K zu;
- ❖ diese Operationen auf K erfüllen die Gesetze von A.

# Eine erste konkrete Algebra K1 zu A

Die abstrakte Algebra A:

$$S = \{ \text{sort} \}$$

$$F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$$

$$\text{op1}: \rightarrow \text{sort}$$

$$\text{op2}: \text{sort} \rightarrow \text{sort}$$

$$\text{op3}: \text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$$

$$G1: \text{op3}(x, \text{op1}()) = x$$

$$G2: \text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$$

Wir wählen als Trägermenge:

Die Menge aller Türme, die sich durch  
Übereinanderlegen von Würfeln bauen  
lassen:



(Der leere Turm ist auch zugelassen.)

Wir wählen als konkrete Operationen:

❖ Die Konstante op1 liefert den leeren Turm:

$$\text{op1}() = \text{_____}$$

❖ Die Operation op2 setzt einen weiteren Würfel  
auf den Turm:

$$\text{op2}(\text{tower of 2 cubes}) = \text{tower of 3 cubes}$$

❖ Die Operation op3 setzt einen Turm auf den  
anderen:

$$\text{op3}(\text{tower of 3 cubes}, \text{tower of 1 cube}) = \text{tower of 4 cubes}$$

# K1 erfüllt die Gesetze von A

Die abstrakte Algebra A:

$S = \{ \text{sort} \}$

$F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$

op1:  $\rightarrow \text{sort}$

op2:  $\text{sort} \rightarrow \text{sort}$

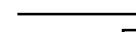
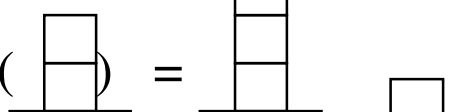
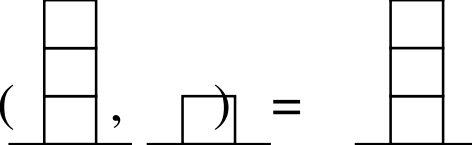
op3:  $\text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

G1:  $\text{op3}(x, \text{op1}()) = x$

G2:  $\text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$

**K1 ist also Konkretisierung  
von A.**

Die Operationen von K1:

- ❖  $\text{op1}() =$  
- ❖  $\text{op2}(\text{stack}) =$  
- ❖  $\text{op3}(\text{stack}, \text{element}) =$  

**Gültigkeit von Gesetz G1:**

$$\text{op3}(\text{stack}(x), \text{op1}()) = \text{op3}(\text{stack}(x), \text{stack}()) = \text{stack}(x) \quad \checkmark$$

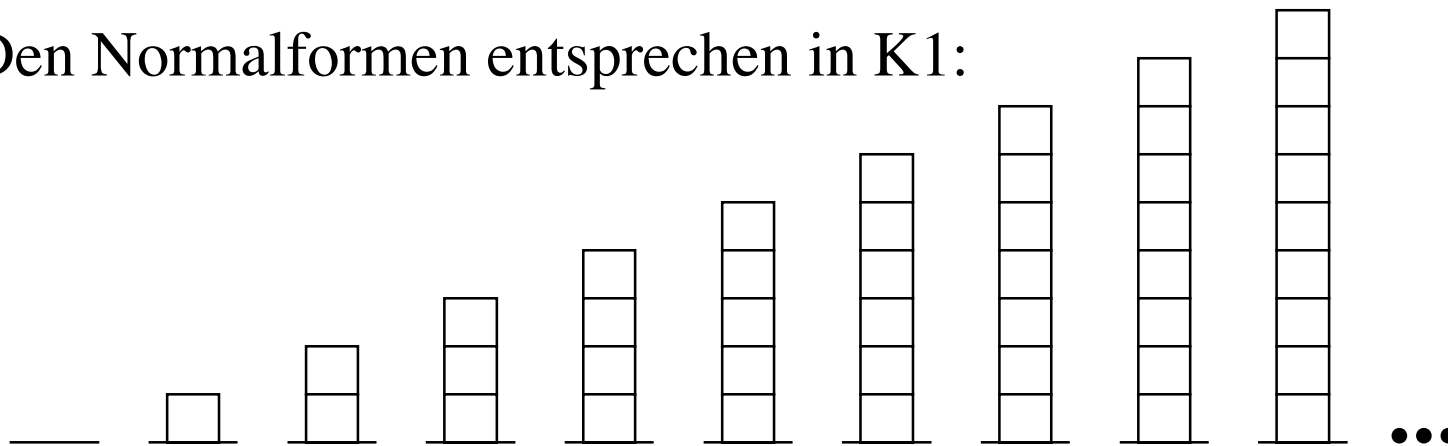
**Gültigkeit von Gesetz G2:**

$$\text{op3}(\text{stack}(x), \text{op2}(\text{stack}(y))) = \text{op3}(\text{stack}(x), \text{stack}(y)) = \text{stack}(y, x)$$

$$\text{op2}(\text{op3}(\text{stack}(x), \text{stack}(y))) = \text{op2}(\text{stack}(y, x)) = \text{stack}(y, x) \quad \checkmark$$

# Normalformen der Terme

- ❖ Terme in Normalform zeichnen sich dadurch aus, dass sich durch Anwendung von Gesetzen die Anzahl der Operationen nicht mehr verringern lassen.
- ❖ In  $A$  lässt sich jedes Auftreten von  $op_3$  eliminieren  
⇒ Normalformen sind die Terme, die nur aus  $op_1$  und  $op_2$  bestehen.
- ❖ Terme von Normalform in  $A$ :  
 $op_1()$ ,  $op_2(op_1())$ ,  $op_2(op_2(op_1()))$ ,  $op_2(op_2(op_2(op_1())))$ , ...
- ❖ Den Normalformen entsprechen in  $K_1$ :



## Weitere Konkretisierung K2 von A

- ❖ Es war nicht von Bedeutung, dass wir die Würfel übereinander gelegt haben. Wir hätten sie ebenso auch nebeneinander legen können.
- ❖ Konkretisierung K2:

Trägermenge: Die Menge aller Quader, die sich durch Nebeneinanderlegen von Würfeln bauen lassen.

–  $op1() = \underline{\quad}$

–  $op2(\underline{\square\square\square}) = \underline{\square\square\square\square}$

–  $op3(\underline{\square\square\square}, \underline{\square\square}) = \underline{\square\square\square\square\square}$

Offensichtlich erfüllt auch K2 wieder die Gesetze G1 und G2.

## Weitere Konkretisierung K3 von A

- ❖ Es war bei K1 und K2 nicht von Bedeutung, dass die Würfel in irgendeiner Reihenfolge angeordnet waren.  
Wir hätten auch Häufchen von Würfeln wählen können.

- ❖ Konkretisierung K3:

Trägermenge: Die Menge aller Häufchen von Würfeln.

- $op1()$  liefert das leere Häufchen.
- $op2()$  fügt einem Häufchen einen weiteren Würfel zu.
- $op3()$  macht aus zwei Häufchen eines.

Offensichtlich erfüllt auch K3 wieder die Gesetze G1 und G2.

- ❖ Aber: Es spielt keine Rolle, ob sich in den Häufchen Würfel, Kugeln, Streichhölzer, ... befinden.  
Wichtig war bisher nur die Anzahl der Dinge!

# Eine weitere konkrete Algebra K4 zu A

Die abstrakte Algebra A:

$$S = \{ \text{sort} \}$$

$$F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$$

$$\text{op1}: \rightarrow \text{sort}$$

$$\text{op2}: \text{sort} \rightarrow \text{sort}$$

$$\text{op3}: \text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$$

$$G1: \text{op3}(x, \text{op1}()) = x$$

$$G2: \text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$$

Wir wählen als Trägermenge:

Die natürlichen Zahlen einschließlich 0.

Wir wählen als Operationen:

$$\text{❖ op1}() = 0$$

$$\text{❖ op2}(x) = x+1$$

$$\text{❖ op3}(x, y) = x+y$$

Gültigkeit der Gesetze:

❖ G1:

$$\text{op3}(x, \text{op1}()) = \text{op3}(x, 0) = x+0 = x$$



❖ G2:

$$\text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op3}(x, y+1) = x+y+1$$

$$\text{op2}(\text{op3}(x, y)) = \text{op2}(x+y) = x+y+1$$



# Andere Bezeichnungen für Sorten und Operationen von A

Die abstrakte Algebra A:

$S = \{ \text{sort} \}$

$F = \{ \text{op1}, \text{op2}, \text{op3} \}$

$\text{op1}: \rightarrow \text{sort}$

$\text{op2}: \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

$\text{op3}: \text{sort} \times \text{sort} \rightarrow \text{sort}$

G1:  $\text{op3}(x, \text{op1}()) = x$

G2:  $\text{op3}(x, \text{op2}(y)) = \text{op2}(\text{op3}(x, y))$

- ❖ Bezeichnungen von Sorten und Operationen sind frei wählbar.
- ❖ Bezeichnungen sind ohne Bedeutung.
- ❖ Sie werden dennoch oft so gewählt, dass ihr Sinn erkennbar wird:

Neue Bezeichnungen für A:

$S = \{ \text{nat0} \}$

$F = \{ \text{zero}, \text{inc}, \text{add} \}$

$\text{zero}: \rightarrow \text{nat0}$

$\text{inc}: \text{nat0} \rightarrow \text{nat0}$

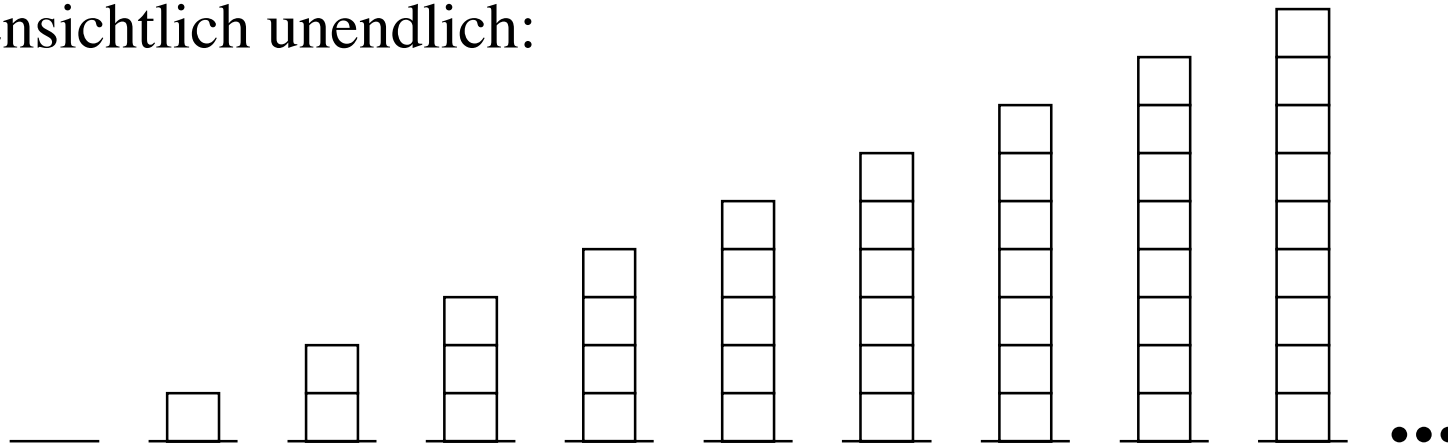
$\text{add}: \text{nat0} \times \text{nat0} \rightarrow \text{nat0}$

G1:  $\text{add}(x, \text{zero}()) = x$

G2:  $\text{add}(x, \text{inc}(y)) = \text{inc}(\text{add}(x, y))$

# Wieviele Elemente haben die Konkretisierungen von A?

- ❖ K1, die Menge aller Türme aus (jeweils endlich vielen) Würfeln, ist offensichtlich unendlich:



- ❖ K2 und K3 sind ganz analog ebenfalls unendlich.
- ❖ Auch K4, die natürlichen Zahlen einschließlich der 0, ist unendlich.
- ❖ Ist jede Konkretisierung von A unendlich?
- ❖ War dies beim Entwurf von A vielleicht beabsichtigt?

# Eine sicherlich endliche konkrete Algebra K5 zu A

Die abstrakte Algebra A:

$$S = \{ \text{nat0} \}$$

$$F = \{ \text{zero}, \text{inc}, \text{add} \}$$

$$\text{zero}: \rightarrow \text{nat0}$$

$$\text{inc}: \text{nat0} \rightarrow \text{nat0}$$

$$\text{add}: \text{nat0} \times \text{nat0} \rightarrow \text{nat0}$$

$$\text{G1: } \text{add}(x, \text{zero}()) = x$$

$$\text{G2: } \text{add}(x, \text{inc}(y)) = \text{inc}(\text{add}(x, y))$$

**War dies wirklich  
beabsichtigt?**

Wir wählen als Trägermenge:

Die einelementige Menge  $\{0\}$ .

Wir wählen als Operationen:

$$\text{❖ } \text{zero}() = 0$$

$$\text{❖ } \text{inc}(x) = 0$$

$$\text{❖ } \text{add}(x, y) = 0$$

Gültigkeit der Gesetze:

$$\text{❖ } \text{G1: } \text{add}(x, \text{zero}()) = 0 = x \quad \checkmark$$

$$\text{❖ } \text{G2: } \text{add}(x, \text{inc}(y)) = 0$$

$$\text{inc}(\text{add}(x, y)) = 0 \quad \checkmark$$